2.4 ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΗΜΙΤΟΝΩΝ
ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Νόμος ημιτόνων : Σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$

2.

Νόμος συνημιτόνων : Σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$
$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B$$
$$\gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2 - 2\beta\alpha\sigma\upsilon\nu \Gamma$$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Με τον νόμο των ημιτόνων

- Όταν γνωρίζουμε μια πλευρά και δύο γωνίες, υπολογίζουμε τις άλλες πλευρές και την τρίτη γωνία του τριγώνου
- Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και μη περιεχόμενη γωνία, υπολογίζουμε την τρίτη πλευρά και τις άλλες γωνίες του τριγώνου
- Αποδεικνύουμε σχέσεις που περιέχουν πλευρές και ημίτονα γωνιών.

2.

Με τον νόμο των συνημιτόνων

- Όταν γνωρίζουμε τις πλευρές ενός τριγώνου, υπολογίζουμε τις γωνίες του
- Όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία ενός τριγώνου, υπολογίζουμε την τρίτη πλευρά
- Αποδεικνύουμε σχέσεις που περιέχουν πλευρές και συνημίτονα γωνιών

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

α) Σε κάθε τρίγωνο ισχύει $αημΓ = γημΑ$ Σ

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $2αγσυνΑ = α^2 + γ^2 - β^2$ Λ

γ) Αν $\hat{A} = 50^o$ και $\hat{Γ} = 60^o$ τότε $β^2 = α^2 + γ^2 - 2αγσυν70^o$ Σ

δ) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ημΑ = 3ημΒ$ τότε $α = 3β$ Σ

ε) Αν $\hat{A} = 60^o$ τότε $α^2 = β^2 + γ^2 + βγ$ Λ

στ) Υπάρχει τρίγωνο με $\hat{A} = 45^o$, $α = 10$ και $β = 20$ Λ

ζ) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ημΑ = ημΒ$ τότε $α = β$ Σ

η) Ο νόμος των ημιτόνων δεν ισχύει σε ορθογώνια τρίγωνα Λ

θ) Ο νόμος των συνημιτόνων ισχύει μόνο σε οξυγώνια τρίγωνα Λ

Προτεινόμενη λύση

α)

$\dfrac{α}{ημΑ} = \dfrac{γ}{ημΓ}$ δηλαδή $αημΓ = γημΑ$ άρα η πρόταση είναι σωστή

β)

$β^2 = α^2 + γ^2 - 2αγσυνΒ$ δηλαδή $2αγσυνΒ = α^2 + γ^2 - β^2$ άρα η πρόταση είναι λάθος

γ)

Προφανώς $\hat{B} = 70^o$ και $β^2 = α^2 + γ^2 - 2αγσυν70^o$ άρα η πρόταση είναι σωστή

δ)

$\dfrac{α}{ημΑ} = \dfrac{β}{ημΒ}$ άρα $\dfrac{α}{3ημΒ} = \dfrac{β}{ημΒ}$ οπότε $α = 3β$ συνεπώς η πρόταση είναι σωστή

ε)

$α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυν60^o = β^2 + γ^2 - 2βγ\dfrac{1}{2} = β^2 + γ^2 - βγ$. Πρόταση λάθος

στ)

$\dfrac{10}{ημ45^o} = \dfrac{20}{ημΒ}$ δηλαδή $\dfrac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{20}{ημΒ}$ συνεπώς $ημΒ = \sqrt{2} > 1$ Πρόταση λάθος

ζ)

$\dfrac{α}{ημΑ} = \dfrac{β}{ημΒ}$ άρα $\dfrac{α}{ημΒ} = \dfrac{β}{ημΒ}$ οπότε $α = β$ η πρόταση είναι σωστή

η)

Ισχύει σε κάθε τρίγωνο άρα η πρόταση είναι λάθος

θ)

Ισχύει σε κάθε τρίγωνο άρα η πρόταση είναι λάθος

2.

Στις παρακάτω ερωτήσεις επιλέξτε την σωστή απάντηση

α) Αν $\widehat{A} = 60^o$ και $\widehat{B} = 50^o$ και $\alpha = 10\sqrt{3}$ τότε η πλευρά β είναι

Α. 3ημ50^o Β. 3συν50^o Γ. 20 ημ50^o Δ .τίποτα από αυτά

β) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$ τότε η γωνία $\widehat{A}$ είναι

Α. 90^o Β. 45^o Γ. 60^o Δ. 120^o Ε. τίποτα από αυτά

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \quad \text{οπότε} \quad \frac{10\sqrt{3}}{\eta\mu 60^o} = \frac{\beta}{\eta\mu 50^o}$$

$$\frac{10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\beta}{\eta\mu 50^o}$$

Σχόλιο 1

$\beta = 20\eta\mu 50^o$ άρα σωστό το Γ

β)

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$ οπότε $\beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$

$$\sigma\upsilon\nu A = \frac{1}{2}$$

$\widehat{A} = 60^o$ άρα σωστό το Γ

3.

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει αημΑ = γημΓ, δείξτε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές

Προτεινόμενη λύση

$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$ άρα αημΓ = γημΑ και λόγω της υπόθεσης Σχόλιο 2

$\alpha\frac{\alpha\eta\mu A}{\gamma} = \gamma\eta\mu A$ όμως ημΑ $\neq 0$ αφού $\widehat{A}$ γωνία τριγώνου

άρα $\alpha^2 = \gamma^2$ και επειδή $\alpha, \gamma > 0$

θα είναι $\alpha = \gamma$

4.

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma = \gamma\sigma\upsilon\nu A$, δείξτε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές

Προτεινόμενη λύση

Από τον νόμο των συνημιτόνων είναι $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}$ και

$$\sigma\upsilon\nu A = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\gamma\beta}$$

Σχόλιο 1

Η υπόθεση γίνεται $\alpha\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta} = \gamma\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\gamma\beta}$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\beta} = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta}$$

$$\alpha^2+\beta^2-\gamma^2 = \beta^2+\gamma^2-\alpha^2$$

$2\alpha^2 = 2\gamma^2$ άρα $\alpha = \gamma$

5.

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ δείξτε ότι

α) $\alpha = \beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B$

β) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\gamma} = \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B = \beta\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta} + \gamma\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\gamma\alpha} =$$

$$= \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha} + \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha} =$$

$$= \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+\gamma^2-\beta^2+\alpha^2}{2\alpha} = \frac{2\alpha^2}{2\alpha} = \alpha$$

β)

$$\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\gamma} = \frac{\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}}{\alpha} + \frac{\dfrac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}}{\beta} + \frac{\dfrac{\beta^2+\alpha^2-\gamma^2}{2\beta\alpha}}{\gamma} =$$

$$= \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\alpha\beta\gamma} + \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\beta\gamma} + \frac{\beta^2+\alpha^2-\gamma^2}{2\alpha\beta\gamma} =$$

$$= \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2+\alpha^2+\gamma^2-\beta^2+\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta\gamma} =$$

$$= \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$$

6.

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν $\alpha + \beta = 12$, $\widehat{A} = 30^o$ και $\widehat{B} = 45^o$, να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών.

Σχόλιο 2

Προτεινόμενη λύση

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \quad \text{άρα} \quad \frac{\alpha}{\eta\mu 30^o} = \frac{\beta}{\eta\mu 45^o} \quad \text{άρα} \quad \frac{\alpha}{\frac{1}{2}} = \frac{\beta}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \text{οπότε } \beta = \alpha\sqrt{2} \quad \textbf{(1)}$$

Η υπόθεση $\alpha + \beta = 12$ γίνεται $\alpha + \alpha\sqrt{2} = 12$

$$\alpha(1 + \sqrt{2}) = 12$$

$$\alpha = \frac{12}{1+\sqrt{2}}$$

Η (1) δίνει $\beta = \dfrac{12\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

Προφανώς $\widehat{\Gamma} = 105^o$ οπότε από την $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ έχουμε ότι $\gamma = \dfrac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A} = \ldots..$

7.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{A} = 60^o$, $\widehat{B} = 45^o$ και $\beta = 5m$.

Να υπολογιστούν η γωνία η γωνία $\widehat{\Gamma}$ και η πλευρά α

Προτεινόμενη λύση

$\widehat{\Gamma} = 180^o - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^o - 60^o - 45^o = 75^o$

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \quad \text{άρα} \quad \frac{\alpha}{\eta\mu 60^o} = \frac{5}{\eta\mu 45^o} \quad \text{συνεπώς} \quad \alpha = \frac{5\eta\mu 60^o}{\eta\mu 45^o} = \ldots.$$

8.

Οι πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκη $\alpha = 5$ m , $\beta = 7$m και $\gamma = 10$m

Να υπολογιστούν τα συνημίτονα των γωνιών του τριγώνου

Σχόλιο 1

Προτεινόμενη λύση

$$\sigma\upsilon\nu A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\gamma\beta} = \frac{7^2 + 10^2 - 5^2}{2\cdot 7\cdot 10} = \frac{124}{140} = \frac{31}{35}$$

συνΒ = …. και συνΓ = ….

9.

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\alpha = 13$m , $\beta = 12$m και $\gamma = 5$m

να υπολογιστεί η γωνία $\widehat{A}$

Προτεινόμενη λύση

$$\sigma\upsilon\nu A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\gamma\beta} = \frac{12^2 + 5^2 - 13^2}{2\cdot 12\cdot 5} = 0 \quad \text{άρα} \quad \widehat{A} = 90^o$$

10 .

Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση $ΒΓ = 10m$ είναι $\widehat{Α} = 150^o$.
Να υπολογιστούν τα μήκη των ίσων πλευρών του τριγώνου.

Προτεινόμενη λύση

Κάθε μία από τις ίσες γωνίες $\widehat{Β}$ και $\widehat{Γ}$ είναι $\widehat{Β} = \widehat{Γ} = \dfrac{180^o - 150^o}{2} = 15^o$

$\dfrac{α}{ημΑ} = \dfrac{β}{ημΒ}$ άρα $\dfrac{10}{ημ150^o} = \dfrac{β}{ημ15^o}$ οπότε $β = \dfrac{10ημ15^o}{ημ150^o} = ….$

11.

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{Α} = 120^o$, $β = 5m$ και $α = 5\sqrt{3}\,m$.
Να υπολογιστούν οι γωνίες $\widehat{Β}$ και $\widehat{Γ}$ και η πλευρά γ.

Προτεινόμενη λύση

$\dfrac{α}{ημΑ} = \dfrac{β}{ημΒ}$ άρα $\dfrac{5\sqrt{3}}{ημ120^o} = \dfrac{5}{ημΒ}$

$\dfrac{5\sqrt{3}}{ημ60^o} = \dfrac{5}{ημΒ}$

$\dfrac{5\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{5}{ημΒ}$ άρα $ημΒ = \dfrac{1}{2}$ συνεπώς $\widehat{Β} = 30^o$ ή $\widehat{Β} = 150^o$

Προφανώς η τιμή $\widehat{Β} = 150^o$ απορρίπτεται αφού $\widehat{Α} = 120^o$ άρα $\widehat{Β} = 30^o$
οπότε και $\widehat{Γ} = 30^o$ συνεπώς το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $γ = β = 5$ m

12.

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ είναι $\widehat{Α} = 30^o$. Δείξτε ότι $α = β\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Προτεινόμενη λύση

$α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυνΑ = β^2 + β^2 - 2β{\cdot}βσυν30^o =$
$= 2β^2 - β^2\sqrt{3} = β^2(2-\sqrt{3})$

Άρα $α = \sqrt{β^2(2-\sqrt{3})} = β\sqrt{2-\sqrt{3}}$